**第四周习题课（多元函数连续、可微及偏导）**

**一．极限与连续的性质**

1. 若在上连续, 且, 证明 函数在上一定有最小值点。

证明：任取, 设;

;

存在: .

显然, 。

1. 在上连续,且

(1) 时, 

(2)  

证明: 存在 使.

证明:令，则 为集合上的连续函数，一定有界，即存在，使得， ，。

1. 设，讨论其在定义域的连续性。

解：显然为函数的定义域。在点一定连续。只要讨论在轴上的连续性。

（1）在点，。

当时，，

当时，，（局部）；

当时，；

所以，，在点连续。

（2）在点，

当时，



。

当时，，

所以，从而在点连续。函数在其定义域内点点连续。

1. 若在点的某个邻域内有定义，，且



为常数。证明：

（1）在点连续；

（2）若，则在点连续，但不可微；

（3）若，则在点可微。

【证明】 当时，，

。

（1），所以在点连续；

（2）若，



不存在，所以在点偏导数不存在，即若，则在点连续，但不可微；

（3）若，则

，

，

且，所以若，则在点可微，并且。

1. 函数　在点是否连续?

(填是或否)；在点是否可微? (填是或否)．

【答案】是，否

【解析】（1） 

在点是连续。

（2） 





不是无穷小．所以不可微。

1. 下列条件成立时能够推出在点可微,且全微分的是（ ）.

(A) 在点两个偏导数

(B)在点的全增量,

(C)在点的全增量

(D) 在点的全增量

解题思路 用两个条件判断：(1) ;

(2) (1)

条件(1)都成立，只有中条件(2)成立,故选D.

1. 设,则在点( B )

(A) 连续,但偏导数不存在； (B) 偏导数存在,但不可微；

(C) 可微； (D) 偏导数存在且连续.

解题思路 ,在的两个偏导数都等于零.如果,在可微,则,从而; 但它不是的高阶无穷小.

1. 设，讨论在点的连续性，偏导存在性，偏导函数连续性，以及可微性。
2. 有如下做法：

设其中在点连续, 则



令, .

指出上述方法的错误；

1. 设二元函数于全平面上可微，为平面上给定的一点，则极限  。

【答案】

1. 设定义在矩形区域上的可微函数。

证明:（1） ;

（2）

证明: (1): 显然.

: 



与无关.

(2) : 显然.

: 与无关.



1. 设，求.

解： ；

，



1. 设函数，证明．

证明： 







所以。

1. 设函数，求及．

解：





1. 求的原函数。

解：若函数满足，则称为求的一个原函数。此时

，；

，

所以，

，。

。

思考：是不是任意的都有原函数？

1. 设，且。

（I）若，求；

（II）若，求。

解：（I），

，

，

，

。

（II），

。

而，所以，

，。

1. 求函数在点沿与轴成角方向的方向导数。

解：方向为。



1. 求函数在点沿曲线在该点的内法方向的方向导数。

解：曲线在点附件的显函数方程为，切线的斜率为，所以内法方向的斜率为，。

，

所以。

1. 设函数，求，，，

解：记，则 ，由链式法则，

；

，



。

1. 若函数有二阶导数，设函数，求．

解：

，其中变量。

，其中变量。



